| 1 | 2 | 3 | 4 | N |
|---|---|---|---|---|
| A⁻ | A | R | A⁻ | 8 |

D'Elia Gabriel 964/11 Ej 1 16

Corrigió: Franco

1) a) Falso.

Sea $\Gamma = \{(p_i \to p_i) : i \in \mathbb{N}\}$, con $p_1, p_2$, etc una enumeración de todas las variables proposicionales. ✓

$Con(\Gamma)$ son todas las tautologías, pues

$\Gamma \models \varphi$ si p.t. $v \models \Gamma$ implica $v \models \varphi$.

Las únicas $\varphi \in FORM$ que son verdaderas para todas las valuaciones son las tautologías. Además $\exists v, v \models \Gamma$ ✓

qvq $\exists \varphi \in FORM$ tal que $\Gamma' = Con(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ es consistente, pero $\varphi \notin Con(\Gamma)$ ✓

Sea $\varphi$ una consistencia. $\Rightarrow \varphi \notin Con(\Gamma)$ ✓

¿contingencia?

$\Rightarrow \exists w \models \varphi$ además $w \models Con(\Gamma)$ ✓

$\Rightarrow \exists w, w \models \Gamma' = Con(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ ✓

$\Gamma'$ es satisfacible y por completitud consistente ✓

Pero entonces $Con(\Gamma)$ no era maximal ✓

□

Deberías fijar $x$ afuera de la definición de $v$, para que sea la misma para todo p. Además estás asumiendo que existe, o sea, que $\Gamma$ es satisfacible (aunque está bien porque si no, trivialmente no sería m.c.).

b) Sea $Var(\Gamma)$ finito.

Sea $v(p) = \begin{cases} x(p) & x \models \Gamma \text{ si } p \in Var(\Gamma) \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$

$w(p) = \begin{cases} v(p) & \text{si } p \in Var(\Gamma) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$ ✓

$\Delta$ entonces existe $p' \notin Var(\Gamma)$ tal que $v \models p'$ y $w \not\models p'$ pero $v \models \Gamma$ y $w \models \Gamma$ entonces $p' \notin Con(\Gamma)$ ✓

qvq $\Gamma' = Con(\Gamma) \cup \{\neg p'\}$ es satisfacible (consistente por completitud)

- $Con(\Gamma) \not\models p'$ pues si no $p' \in Con(Con(\Gamma))$ pero $Con(Con(\Gamma)) = Con(\Gamma)$ Absurdo $p' \notin Con(\Gamma)$ es p.4 ✓

- $\neg p \notin Con(\Gamma)$ pues se puede repetir el argumento $\Delta$ para $\neg p$ ✓

entonces $Con(\Gamma) \not\models p'$ $\neg p' \notin Con(\Gamma)$ puedo agregar $\neg p'$ a $Con(\Gamma)$. ✓ O bien $Con(\Gamma)$ no era consistente
esto lo asumiste al definir $v$ y $w$.
o bien no es maximal ✓ $\therefore$ $Con(\Gamma)$ no es m.c.

$Var(\Gamma)$ finito $\Rightarrow$ $Con(\Gamma)$ m.c. ⊣

Corrigió: Franco

D'Elía Cabral 964/?? EJ 2 16

2) a) Falso.

Sea $\Gamma = \{p, \neg p\}$ ✓

$\exists v$, $v \models p$ pero $v \not\models \neg p$ ✓ } $\Gamma$ es individualizante

$w$, $w \not\models p$ pero $w \models \neg p$ ✓

sin embargo claramente $\Gamma$ es insatisfacible. ✓

b) Verdadero. Sea $v \not\models_{\Gamma} \varphi_{k+1}$

(Noto $v \not\models_{\Gamma} \varphi$ a una valuación que solo fuerza a $\varphi$ en $\Gamma$ ($\models$ es como un uno))

Ok.

con $\varphi_{k+1}$ el k-ésimo +1 elemento de $\Gamma$ si lo numeramos de alguna manera (no tiene porque ser la misma siempre) ✓

$\{\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_k\} = \Sigma$ $\varphi_{k+1} \notin \Sigma$ ✓

Sea $\overline{\overline{\Sigma}} = \{\neg \varphi_1, \neg \varphi_2, .., \neg \varphi_k\}$ ✓

pero $v \models \overline{\overline{\Sigma}}$ pues $v \not\models \varphi_1, .., v \not\models \varphi_k$ y por semántica $v \models \neg \varphi_1 .., v \models \neg \varphi_k$, ergo es satisfacible ✓

$\overline{\overline{\Sigma}}$ no está fijo acá porque depende de k. Sí es cierto

Sea un $\Gamma_0$ finito $\subseteq \overline{\overline{\Sigma}} \subseteq \Gamma'$

que para cualquier $\Gamma_0$ se puede elegir k y construir un $\overline{\overline{\Sigma}}$ que sirva,

$\Gamma_0$ es satisfacible pues está contenido en $\overline{\overline{\Sigma}}$ ✓

pero sería bueno escribir eso bien claro.

pero entonces $\forall \Gamma_0$ finito $\subseteq \Gamma'$ satisfacible ✓

$\therefore$ $\Gamma'$ satisfacible por compacidad ✓

(R)

3) Sea $\neg\varphi$ la propiedad "f es oscilante"

Voy a construir infinitas formulas que niegen iterativamente a $\varphi$

sea $\psi_1$ : Existe uno o mas puntos a P

$\vdots$

$\psi_n$ : Existen n valores $x_1 .. x_n$ o más en P

Luego doy una expresión para $\psi_i$

$$P = \{ x_i : x_{i+1} > x_i \wedge f(x_i) > f(x_{i+1}) \wedge i \text{ par} \}$$
$$\{ x_j : x_{j+1} > x_j \wedge f(x_j) < f(x_{j+1}) \wedge j \text{ impar} \}$$

sea $\Gamma = \{ \psi_i : i \in \mathbb{N}_{>0} \} \cup \{ \varphi \}$ , $\mathcal{M}$ una L-estructura

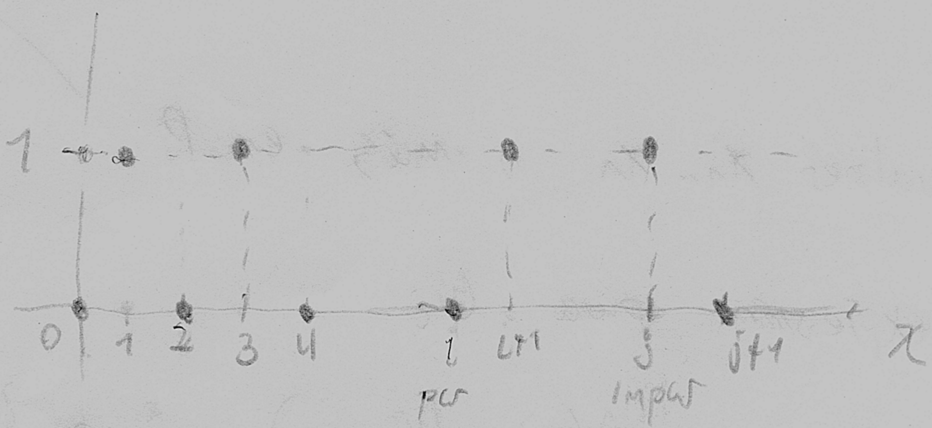
Hay dos casos .. $\exists K \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\mathcal{M} \models \psi_0 ....$

$... \mathcal{M} \models \psi_K$ pero entonces $\mathcal{M} \not\models \psi_{K+1}$ , $\mathcal{M} \not\models \Gamma$

$\nexists K$ pero entonces , $\mathcal{M} \not\models \varphi$ . pues esta dice que f no es oscilante, es decir los puntos en P son finitos (o inexistentes) pero si $\mathcal{M} \models \{ \psi_i : i \in \mathbb{N}_{>0} \}$ no tengo esta

Por compacidad tenemos algún $\Gamma_0$ finito e insatisfacible.

Sea $\Gamma_0 \subseteq \underbrace{\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}}_{?} = \Theta$




es decir, sea el modelo $\mathcal{M}'$ con universo $\mathbb{N}$

y $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$\mathcal{M}' \models \varphi_1$ $\quad f(0) > f(1) \Rightarrow 0 \in P$

$\mathcal{M}' \models \varphi_2$ $\quad f(1) < f(2) \Rightarrow 1 \in P$

$\vdots$

$\mathcal{M}' \models \varphi_m$ $\quad f(m) > f(m+1)$ si $m$ es par

$f(m) < f(m+1)$ si $m$ es par

$\mathcal{M} \models \Theta \Rightarrow \mathcal{M} \models \Gamma_0$ satisfacible! Abs

X deberías probar que todo $\Gamma_0$ es satisfacible, incluso los que contienen $\varphi_0$, no uno particular

D'Elía Gabriel 964/11 EJ3 16

3) Me faltó dar una expresión a $\varphi_i$

$$\varphi_i = (\exists x)(\exists y)\left[\left(f(x) > f(y)\right) \wedge (\forall z)\left(\neg(x < z \wedge z < y)\right) \wedge x < y\right] \wedge \varphi_{i-1}$$ si $i$ par

si $i$ es impar $\Rightarrow$ sólo cambia $f(x) < f(y)$ en la fórmula

$$\varphi_0 = (\exists x\, \exists y)\left[f(x) > f(y) \wedge (\forall z)(z > x \wedge \neg z < y) \wedge x < y\right]$$

$\Rightarrow \varphi_i$ tiene $i$ existenciales

D'Elia Cabrel 964/11 EJ 4 16

B⁻

4) a) $\mathbb{Z} \models (\forall x)(\forall y)\underbrace{(\neg(x=y) \rightarrow (x<y \vee y<x))}_{\psi}$

B

sii para todo a y b ; $\mathcal{M} \models \psi$ sii

$\mathbb{Z} \models (x=y)\ [v(x=a, y=b)]$

ó

$\mathbb{Z} \models (x<y \vee y<x)\ [v(x=a, y=b)]$

y esto último:

$\mathbb{Z} \models (x<y)\ [v(x=a, y=b)]$

ó

$\mathbb{Z} \models (y, x)\ [v(x=a, y=b)]$

sii Para todo a y b o son iguales o uno es ~~m~~ menor que el otro

lo cual es cierto para los enteros.

b) $\mathbb{N}$ universo de $\mathcal{M}$ , $<_{\mathcal{M}}$ desigualdad estricta "es menor a"

B $\varphi = (\forall x)(\exists y)(y < x)$

esto es falso en los $\mathbb{N}$ pues el cero es el menor de los nros naturales.

$\mathcal{M} \not\models \varphi$ sin embargo $\mathbb{Z} \models \mathcal{M}$ pues los enteros no tienen ínfimo.

c) con $\varphi$ del punto anterior

B Teo diapo 156

si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$ (i.e si es teorema de la teoría $\Gamma$, es valido en toda interpretación de $\Gamma$)

Por hipótesis $SQ_{\mathbb{Z}}$ es correcto respecto a $\mathbb{Z}$ (nuestro $\Gamma$)

pero entonces es correcto en toda interpretación de $SQ_{\mathbb{Z}}$, y en particular $\mathcal{M}$. $SQ_{\mathbb{Z}}$ es correcto en $M$ por b) donde visto que todo SQ1,... era valido en $M$

tenemos contra recíproca de correctitud

$\Gamma \not\models \alpha \Rightarrow \Gamma \nvdash \alpha$ en alguna interpretación

Ojo, $\Gamma$ es un conj de formulas y $M$ es un modelo

precisamente en $\mathcal{M} \not\models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \nvdash \varphi$ Ok, entonces esto no va

pero una derivación es una regla sintáctica, no depende del modelo i.e $\nvdash_{SQ_{\mathbb{Z}}} \varphi$

tenemos entonces que

$\nvdash_{SQ_Z} \varphi$ pero $Z \vDash \varphi$ como vimos en el punto b)

Hay una verdad de Z que no podemos derivar de los axiomas.

$\therefore$ $SQ_Z$ no es completo respecto a Z